

Messung der Grundmode einer akustischen Röhre zu höheren Frequenzen

Joerg Panzer

Akustische Röhren werden zur Schallführung in Lautsprecher-Systemen oder zur Messung von Materialeigenschaften verwendet. Wenn die Wellenlänge kleiner als der Durchmesser des Rohres ist, können Quermoden angeregt werden. In diesem Beitrag wird eine Methode vorgestellt, die es ermöglicht, aus der Messung der Schalldruckantwort nur die Grundmode zu extrahieren. Dies lässt sich bewerkstelligen durch Verwendung von drei Mikrofonen, die in die Wand eines kreisförmigen Rohres eingelassen sind.

Einführung

In diesem Beitrag wird über eine Beobachtung berichtet, die es nahelegt, den Frequenzbereich einer bestimmten Art von Messung zu erweitern. Die folgenden Beobachtungen wurden an einer Apparatur gemacht, welche den Schalldruckverlauf von einem Druckkammerlautsprecher misst. Abbildung 1 skizziert diesen Messaufbau. Die im folgenden gegebene Erklärung des Phänomens ist gültig für alle Abmessungen des Rohres, solange das Schallfeld in harmonisch zyklische Wellenfunktionen zerlegt werden kann. Dazu mehr im nächsten Abschnitt.

Ein Lautsprecher treibt den Wellenleiter mit einem sinusförmigen Signal von ausreichend niedrigem Pegel an, so dass wir von einer linearen Akustik ausgehen können. Die Größenverhältnisse können im Prinzip beliebig sein. Für das Verständnis stellen wir uns aber zunächst eine Röhre vor, deren Länge L größer ist als der Durchmesser D . Wir nehmen weiterhin einen konstanten kreisförmigen Querschnitt an. Am Ende des Rohres kann eine beliebige Randbedingung herrschen. Diese ist für die folgende Untersuchung nicht relevant.

Um den Schalldruck zu messen, betten wir mehrere Mikrofone in die Wand des Rohres entlang des Umfangs ein. Für das hier vorgestellte Experiment verteilen wir drei Mikrofone gleichmäßig entlang des Umfangs, wie in Abbildung 2 dargestellt.

Das folgende Beispiel einer Schalldruckmessung stammt von einem Rohr mit dem Durchmesser $D=38$ mm. Das Medium im Inneren des Rohres besteht aus Luft. Es gibt kein weiteres Füllmaterial.

Extracting the Fundamental Mode from Sound Pressure Measurements in an Acoustic Tube

Acoustic tubes are used to provide a load to loudspeakers or to measure material properties. If the wavelength is comparable to the diameter of the tube cross-modes can be excited. This paper demonstrates a method which allows to extract the fundamental mode from the measurement of the sound-pressure response. The only requirement is the use of three microphones mounted into the sides of the tube-wall as well as a circular cross-section.

Die Wände sind akustisch hart. Das Rohr besitzt am Ende eine frei abstrahlende Öffnung. Die gemessenen Daten werden in den Zeitbereich transformiert und dort so gefenstert, dass die Spektralkurve eine reflexionsfreie Antwort darstellt. Abbildung 3 zeigt die Frequenzgangkurven des Schalldruckpegels an den Mikrofonen M1, M2 und M3.

Abb. 1: Seitenansicht des Versuchsaufbaus

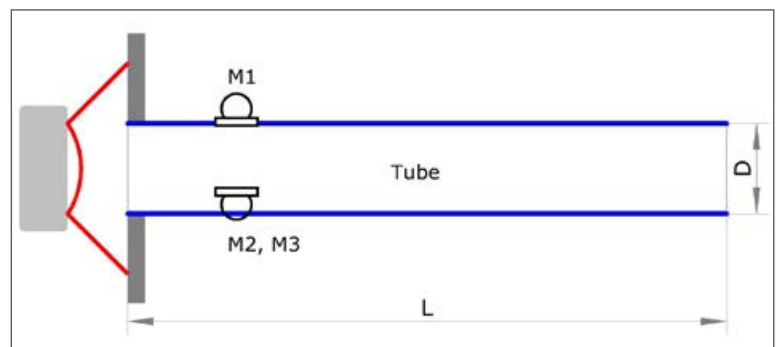
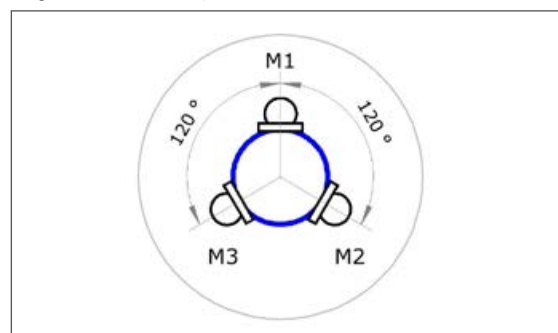


Abb. 2: Schnittdarstellung der akustischen Röhre und Lage der drei Mikrofone



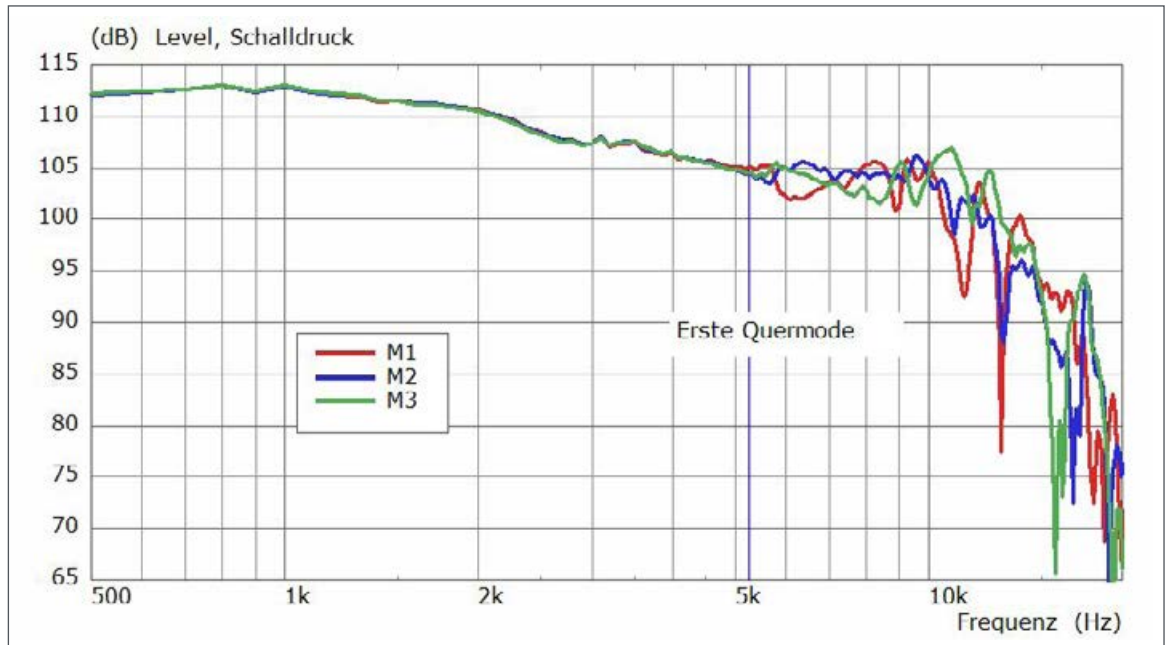


Abb. 3: Schalldruckpegel der drei Mikrofone (Reflexionen in z-Richtung entfernt)

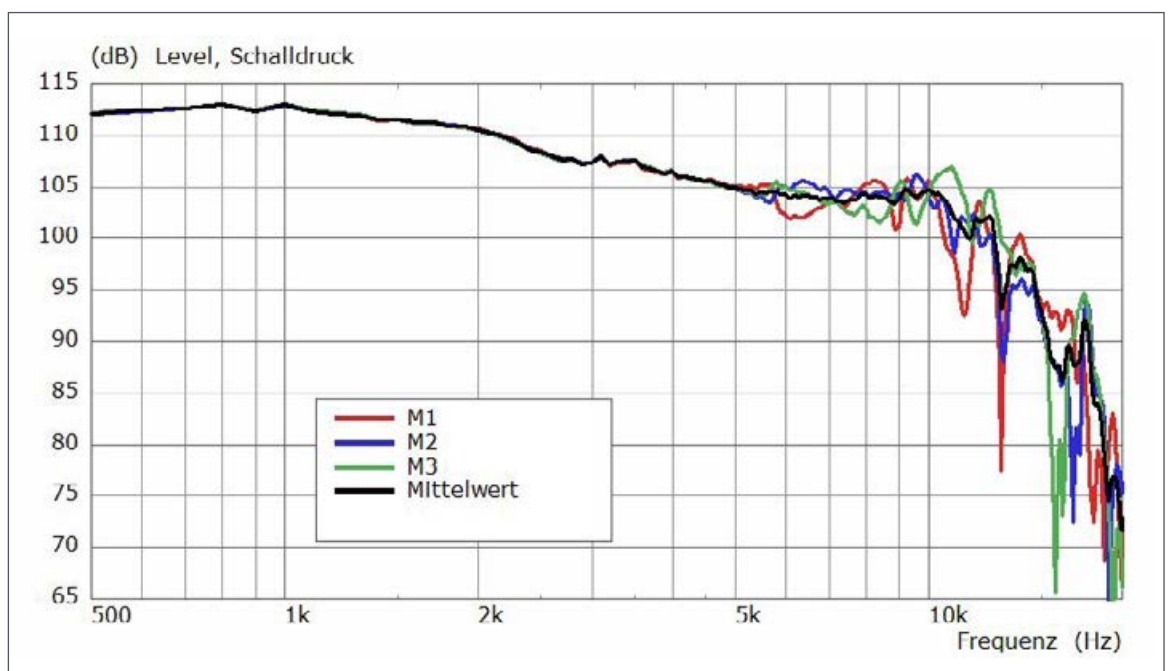
Im Frequenzbereich unterhalb 5 kHz sind die Frequenzgangkurven aller drei Mikrofone nahezu identisch.

Oberhalb von 5 kHz tritt eine Abweichung auf. Folgende Fragen ergeben sich: Warum sind die Frequenzgänge plötzlich unterschiedlich? Welche Kurve ist die richtige? Und was bedeutet „richtig“ in diesem Zusammenhang?

Die nähere Untersuchung zeigt, dass der einzige Unterschied zwischen den drei Messkanälen in der Winkelstellung der Mikrofone besteht. Ein weiterer Hinweis ergibt sich aus der Frequenz, oberhalb

derer sich die Frequenzgangkurven unterscheiden. Der Marker in Abbildung 3 ist eingestellt auf die Frequenz $f_{10} = 5276$ Hz. Ein möglicher Kandidat für die Ursache der Abweichungen sind sich ausbreitende Quermoden. Die Moden prägen sich abhängig von den Randbedingungen aus. Weitere Einzelheiten zu Moden werden im nächsten Kapitel besprochen, wo wir sehen werden, dass die Frequenz f_{10} die erste Quermode ist, die sich bei gegebenen Randbedingungen entlang der Röhre ausbreiten kann. Dies ist ein deutlicher Hinweis darauf, dass Quermoden die Ursache für die Schwankungen sind.

Abb. 4: Schalldruckpegel der drei Mikrofone und deren Mittelwert (Reflexionen in axialer Richtung entfernt)



Diese Quermodenaktivität bedeutet, dass der Schalldruck im Rohr nicht konstant über die Querschnittsfläche ist. Daher ist bei hohen Frequenzen die Mikrofonmessung an der Seite nicht repräsentativ für den Schalldruck im Inneren des Kanals. Bildet man jedoch den komplexwertigen Mittelwert der Antworten der Mikrofone M1, M2 und M3, so erhält man ein überraschendes Ergebnis, welches in Abbildung 4 dargestellt ist:

Es ist verlockend anzunehmen, dass der Mittelwert, dargestellt durch die schwarze Kurve in Abbildung 4, der Frequenzgang der Grundmode ist. Wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, handelt es sich bei der schwarzen Kurve in der Tat um die Antwort der Grundschwingung; dies gilt jedoch nur bis zu einer bestimmten Frequenz. Für unsere Beispielröhre liegt diese Frequenz bei $f_{01} = 10\,980$ Hz. Der neue Grenzwert liegt etwa eine Oktave über der klassischen Grenzfrequenz f_{10} , die gelten würde, wäre nur ein einziges Mikrofon entlang des Umfangs vorhanden [1].

Analyse

Bei niedrigen Schalldruckpegeln wird die Akustik im Kanal durch die lineare Wellengleichung bestimmt. Die Lösungen bestehen aus Wellenfunktionen. Die Geometrie unserer akustischen Röhre legt es nahe,

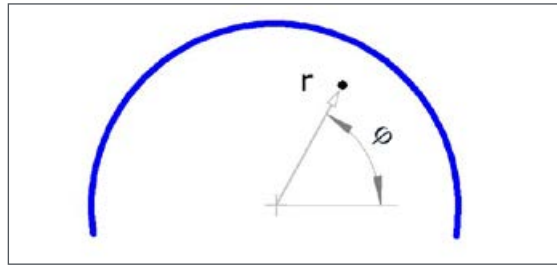


Abb. 5: Koordinaten des Radius $= \{r \mid 0 \leq D/2\}$ und des Umfangswinkels $= \{\varphi \mid 0 \leq \varphi \leq 360^\circ\}$

die Methode der Trennung der Variablen anzuwenden. Diese Methode liefert individuelle Wellenfunktionen, welche die Randbedingungen erfüllen und frei sind von gegenseitiger Koppelung. Daher hat für eine harmonische Analyse unsere grundlegende Lösung die allgemeine Form:

$$p(\varphi, r, z) = \sum \Phi(\varphi) R(r) Z(z) \quad (1)$$

In einem Rohr von kreisförmigem Querschnitt lässt sich die Wellenfunktion am besten in zylindrischen Koordinaten ausdrücken. Die radiale Koordinate bezeichnen wir mit r und die Umfangskoordinate mit dem Winkel φ , wie in Abbildung 5 dargestellt.

Die axiale Koordinate sei z und wird entlang des Roh-



Product sound quality is a key technological differentiator

Accuracy, performance, usability, and openness, are software characteristics engineers from all industries are looking for in order to make the most of the outcomes of the simulation during all phases of product design and manufacturing.

Learn more about Hexagon complete simulation solution for acoustics, vibro-acoustics and aero-acoustics

Learn more:





Abb. 6: Axiale Koordinate = $\{z \mid 0 \leq L\}$

res gemessen, wie in Abbildung 6 dargestellt.

Wenn das Rohr einen konstanten Schalldruck über den Querschnitt aufweist, wird es als „Plane-Wave-Tube“ oder Wellenleiter im Grundmodus bezeichnet. In diesem Fall vereinfacht sich die Wellenfunktion zu:

$$p(z) = Z(z) \quad (2)$$

Zur Anschauung der Schalldruckverteilung in einer kreisförmigen Röhre wollen wir nun zwei charakteristische Fälle betrachten. Ein Beispiel für ein Schalldruckfeld, bei dem nur die Grundmode angeregt wird, ist in Abbildung 7 dargestellt.

Theoretisch dominiert die Grundmode entweder im tieffrequenten Bereich oder bei Anregung des Feldes durch einen Kolben mit demselben Durchmesser wie das Rohr. In Abbildung 7 ist links eine schwingende Begrenzung und rechts eine schallharte Wand zu denken. Die Frequenz $f = 6127$ Hz ist willkürlich gewählt und ist keine Eigenfrequenz.

Wenn die Anregung asymmetrisch ist, wird das Feld komplexer, wie Abbildung 8 zeigt.

Das Feld der Röhre in Abbildung 8 wird von einer Punktquelle angeregt, die sich asymmetrisch auf der linken Seite befindet. Das Felddiagramm unterscheidet sich deutlich von dem Feld in Abbildung 7, obwohl die Randbedingungen identisch sind. Der Grund dafür ist, dass sich Quermoden, die in der Nähe der Schalldruckquelle angeregt werden, entlang des Kanals ausbreiten können. Dies ist so, weil die Wellenlänge bei dieser Frequenz klein genug gegenüber den Abmessungen ist. Umgekehrt würden bei einer großen Wellenlänge die Quermoden ebenfalls angeregt werden. Allerdings würden sich diese Moden nicht weit ausbreiten können und sich mit zunehmender Entfernung von der Punktquelle verflüchtigen.

Abb. 7: Schalldruckpegel bei $f = 6127$ Hz. Bereich: Rot–Blau = 50 dB. $d = 38$ mm, $L = 400$ mm, Schallgeschwindigkeit $c = 343$ m/s. Antrieb durch Kolben von links.

Neumann-Randbedingungen auf der rechten Seite des Rohres: $dp/dz=0$

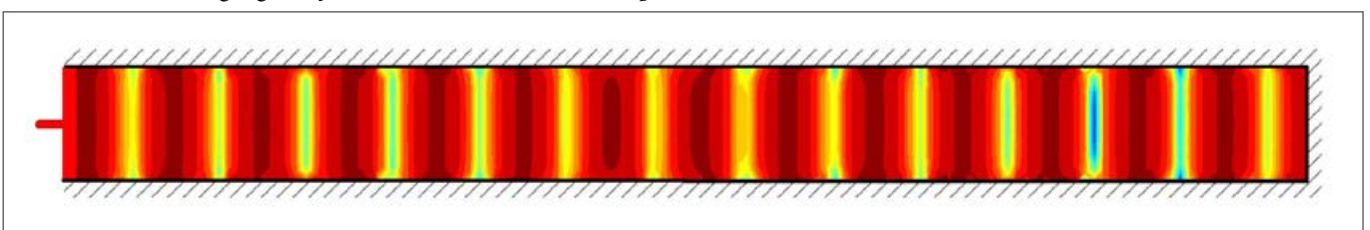


Abbildung 9 zeigt Beispieldiagramme der Feldverteilung über den Querschnitt.

Die Wellenfunktion ist komplex genug, um eine Vielzahl von Randbedingungen zu erfüllen. Der interessierte Leser sei auf die Lektüre von [4] und [5] hingewiesen. Hier wollen wir uns auf einige wesentliche Merkmale beschränken. Diese Merkmale reichen aus, um zu zeigen, dass unser Messaufbau von drei Mikrofonen die Grundmode auch dann extrahieren kann, wenn das Feld nicht eben ist.

Die Summe der Formel (1) läuft auch über alle Quermoden. Es gibt Moden für die Umfangswellenfunktion ϕ und Moden für die Radialfunktion R . Für einen kreisförmigen Kanal lautet die Umfangsfunktion

$$\Phi_m(\varphi) = \cos(m \cdot \varphi) \quad (3),$$

m ist der Index einer Umfangsmode. Die radiale Komponente der Wellenfunktion lautet

$$R_{mn}(r) = J_m\left(\frac{2r}{D} \pi \cdot q_{mn}\right) \quad (4).$$

D ist der Rohrdurchmesser. Der Index m ist wieder die Nummer der Umfangsmode. m entspricht auch der Ordnung der Bessel-Funktion J_m . Der Index n zählt die Radialmode. Die Eigenwerte q_{mn} der Bessel-Funktion erfüllen die gegebene Randbedingung in der Querschnittsebene.

Die Mode mit den Indizes $m=0$ und $n=0$ ist die Grundmode. Sie erzeugt ein konstantes Feld über den Querschnitt. Wellenfunktionen mit dem Index $m > 0$ und $n=0$ erzeugen ein sternförmiges Muster, wie durch Gleichung 3 gegeben. Moden mit $m=0$ und $n > 0$ zeigen ein ringförmiges Muster, wie durch Formel 4 gegeben. Darüber hinaus ergeben sich Kombinationsmoden. Jede Umfangsmode m hat ein Set von Radialmoden in n , wobei für jedes m der Index n von null an zählt. Die Anzahl der Moden ist theoretisch unbegrenzt.

Die dritte Komponente der Wellenfunktion betrifft die z -Richtung. Ihre Größe ist typischerweise auch von m und n abhängig. Wir nehmen an, dass die hier gegebene Untersuchung unabhängig von der z -Richtung ist. Wir setzen daher $Z(z) = Z_{mn}(z)$.

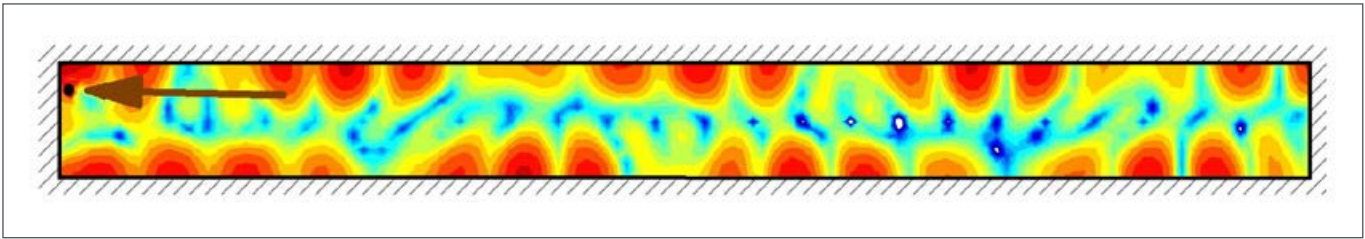


Abb. 8: Ansteuerung durch eine Punktquelle von beliebiger Position. Neumann-Randbedingungen auf der linken und rechten Seite des Rohres (ansonsten wie in Abbildung 7).

Nachdem wir uns einen Überblick über die Zylinderfunktionen verschafft haben, können wir einen Ausdruck für den Mittelwert des Signals von gleichmäßig über den Umfang verteilten Mikrofonen formulieren. Setzt man Gleichung 3 und 4 in Gleichung 1 ein und bildet den Mittelwert durch Summierung der entsprechenden Schalldruckfunktionen, so ergibt sich eine spezielle modale Wellenfunktion

$$\bar{p}(\varphi, r, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_m(\varphi) R_{mn}(r) Z_{mn} \quad (5),$$

mit der neuen Funktion C_m , wobei davon ausgegangen wird, dass die Mikrofonpositionen gleichmäßig entlang des Umfangs angeordnet sind:

$$C_m(\varphi) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \cos\left(m \cdot \varphi + m \cdot i \cdot \frac{2\pi}{N}\right) \quad (6).$$

In C_m steht N für die Anzahl der Mikrofone. C_m hat für alle φ folgendes Ergebnis:

$$C_m(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{für } m = 0 \\ 0 & \text{für } m > 0 \wedge m < N \end{cases} \quad (7).$$

Spielen wir die obigen Formeln für einen bestimmten Fall durch. Zum Beispiel können wir drei Mikrofone entlang des Umfangs an einer beliebigen z -Koordinate anbringen. Wir achten darauf, dass die Mikrofone nicht zu nahe bei der Quelle liegen. Bei drei Mikrofonen haben wir $N=3$, was zu $C_0(\varphi)=1$, $C_1(\varphi)=0$ und $C_2(\varphi)=0$ führt. Das bedeutet, dass sich die Umfangsmoden $m=1$ und $m=2$ durch Addition der Signale der Mikrofone M1, M2 und M3 aufheben. Da die Radialmoden von den Umfangsmoden abhängen, würden sich alle Radialmoden, die $mn=1n$ und $mn=2n$ zählen, ebenfalls aufheben. Abbildung 10 veranschaulicht die Aufnahme mit den drei Mikrofonen.

Die Kurven in Abbildung 10 verdeutlichen die Wirkungsweise von Formel 3. Die verschiedenen Farben zeigen entgegengesetzte Phasenlagen an. Das Argument ist der Umfangswinkel φ , wie in Abbildung 5 skizziert. Bei $m=0$ ist der Schalldruck konstant, und alle Mikrofone nehmen das gleiche Signal auf. Bei $m=1$ besitzt die Form des Schalldruckverlaufs Dipolcharakter. Jede Keule hat eine entgegengesetzte Phase. Die Summe der drei Mikrofone addiert sich zu Null. Bei $m=2$ haben wir einen Vierpol. Auch die

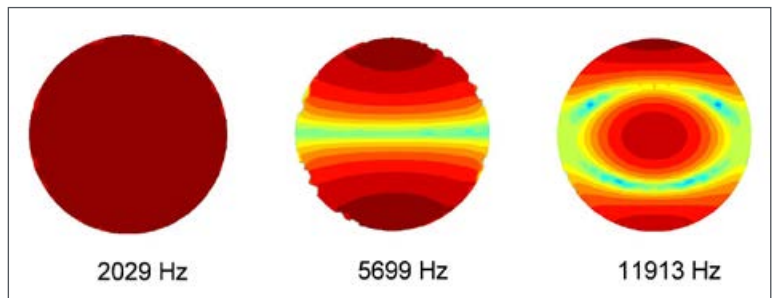
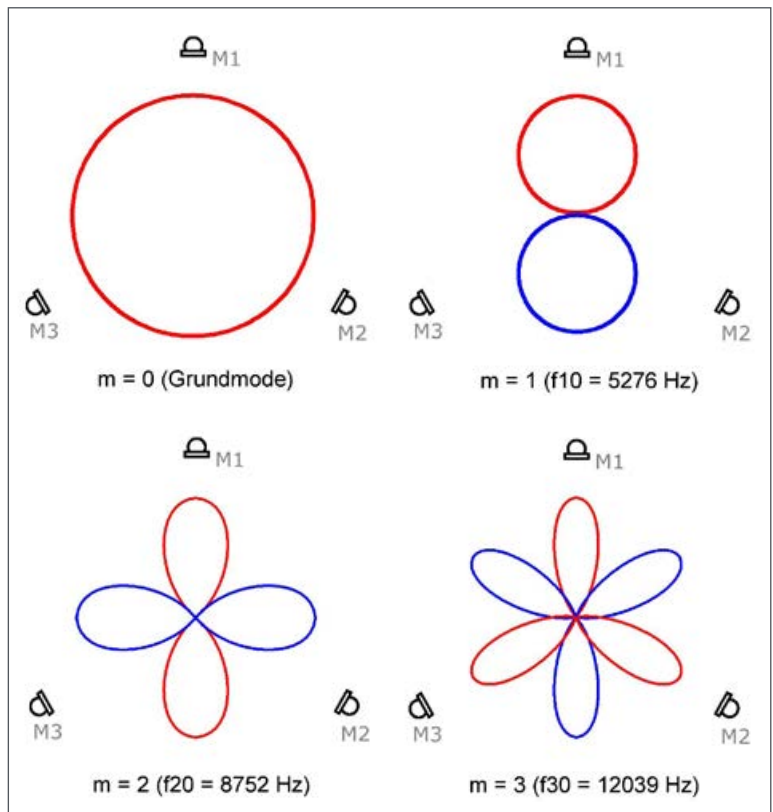


Abb. 9: Schalldruckverteilung des Querschnitts bei $z = 100$ mm (ansonsten wie in Abbildung 8).

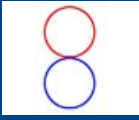


ser summiert sich zu Null. Mit $m=3$ schließlich führt die räumliche Unterabtastung dazu, dass die Summe der Signale denselben Wert ergibt, wie wir ihn mit nur einem Mikrofon messen würden.

Bei $N=3$ Mikrofonen ist daher eine obere Grenze die Frequenz $f_{30} = 12039$ Hz, unterhalb welcher der Mittelwert die Umfangsmodi auslöschen würde. Es

Abb. 10: Polardiagramm der Umfangsmodi (Formel 3) mit $m = 0 \dots 3$



Tab. 1: Obere Grenzfrequenzen des gültigen Messbereichs von verschiedenen Rohrdurchmessern D und Anzahl N von Mikrofonen.

			
D	Umfang f_{10}	Umfang f_{20}	Radial f_{01}
mm	Hz	Hz	Hz
25,4	7914	13 128	16 470
38,1	5 276	8 752	10 980
50,8	3 957	6 564	8 235
70,0	2 872	4 764	5 976
100,0	2 010	3 335	4 183
120,0	1 675	2 779	3 486
150,0	1 340	2 223	2 789
200,0	1 005	1 667	2 092
250,0	804	1 334	1 673
q_{mn}	0,5861	0,9722	1,2197

gilt jedoch, auch die radialen Moden zu beachten, da die Mikrofone immer die Überlagerung aller Moden messen. Allerdings wissen wir, dass sich durch Interferenz die Umfangsmode $m = 1$ und $m = 2$ und alle dazugehörigen Radialmodi auslöschen.

Nun sollten wir uns die Menge der Radialmoden von $m = 0$ noch genauer ansehen. Hier tritt die erste Radialmode bei $f_{01} = 10\,980$ Hz auf. Bei jeder Anregungsfrequenz, die höher als f_{01} ist, kann sich diese Radialmode entlang der Röhre ausbreiten und wird daher überall mit der Grundmode überlagert sein. Andersherum betrachtet kann man sagen, dass für alle Frequenzen unterhalb von $f_{01} = 10\,980$ Hz der Mittelwert der Signale der drei Mikrofone genau die Grundmode ergibt. Oberhalb von f_{01} und unterhalb von f_{30} ist ein Fehler durch zusätzliche Radialmoden zu erwarten. Bei höheren Frequenzen als f_{30} kann das Ergebnis aufgrund von räumlicher Unterabtastung der Quermoden fehlerhaft sein.

Tabelle 1 führt Grenzfrequenzen für eine Reihe von Rohrdurchmessern D und Anzahl von Mikrofonen N auf.

Als Grundlage für die Erstellung der Tabelle 1 wird angenommen, dass das Rohr in φ -Richtung kreisförmig ist und in r -Richtung schallharte Randbedingungen bestehen. Die erste Spalte zeigt den Rohrdurchmesser. In der zweiten Spalte ist die obere

re Grenzfrequenz f_{10} in Hz angegeben, für den Fall, dass nur ein einziges Mikrofon verwendet wird. Die dritte Spalte gibt die obere Grenzfrequenz an, wenn zwei Mikrofone verwendet werden. In der letzten Spalte sind die oberen Grenzfrequenzen f_{01} aufgeführt, wenn drei oder mehr Mikrofone entlang des Umfangs positioniert sind. Wie bereits erwähnt, ist der Mittelwert der Signale dieser Mikrofone für alle Frequenzen, die kleiner sind als die Radialmode f_{01} , identisch mit der Grundschwingung.

Die oben genannten Werte errechnen sich aus den Eigenwerten der Formel 4, die durch die Nullstellen der Ableitung der Bessel-Funktion gegeben sind:

$$\frac{d}{dx} J_m(\pi \cdot q_{mn}) = 0 \quad (8).$$

Für jede Umfangsmode m gibt es eine Reihe von Radialmoden, die in n variieren. Sobald die Nullstellen von Formel 8 gefunden sind, kann man die zugehörigen Frequenzen berechnen:

$$f_{mn} = q_{mn} \cdot \frac{c}{D} \quad (9)$$

mit der Schallgeschwindigkeit c und dem Rohrdurchmesser D . In der letzten Zeile von Tabelle 1 sind die drei Eigenwerte für f_{10}, f_{20}, f_{01} angegeben.

Bei der Verwendung von zwei Mikrofonen ($N=2$) würden nur die Moden gelöscht, die zu der Menge mit dem Index $m = 1$ gehören. Der Modensatz von $m = 2$ wäre wegen der räumlichen Unterabtastung unberechenbar. Daher bildet im Fall von $N=2$ die zweite Umfangsmode f_{20} die obere Grenzfrequenz.

Die Verwendung von vier oder mehr Mikrofonen würde den gültigen Frequenzbereich, in dem der Mittelwert des Mikrofonsignals die Grundmode darstellt, nicht vergrößern. Mehr Mikrofone würden nur den Wert der Alias-Frequenz erhöhen. Allerdings wäre jeder solche Wert höher als die erste radiale Mode f_{01} .

Anmerkungen

Das Normenwerk [1] und auch die Artikel [2] und [3] über „Plane-Wave-Tubes“, an das sich die vorliegende Arbeit anschließt, sieht nur die Verwendung eines einzelnen Mikrofons vor. Empfohlen wird der Frequenzbereich bis f_{10} (Anmerkung: Im Annex B.4.1 wird angedeutet, dass es von Vorteil sein könnte, drei Mikrofone zu verwenden). Die Tabelle 1 der Norm ist vergleichbar mit der Tabelle 1 dieser Arbeit. Der Begriff „Asymmetric“ ist identisch mit unserem „Umfang“ und „Symmetric“ mit unserem „Radial“. „Mode No = 3“ ist mit unserer oberen Grenzfrequenz f_{01} gleichzusetzen, welche die erste radiale Mode darstellt.

Die Verwendung von mehreren Mikrofonen bietet noch einen weiteren Vorteil gegenüber einem ein-

zelen Mikrofon. Wie Abbildung 3 zeigt, ist der Frequenzbereich der Aktivität der Quermoden deutlich sichtbar. Die Verwendung mehrerer Mikrofone dient also als Indikator. Mit nur einem Mikrofon wäre der Übergangsbereich weniger gut zu erkennen, da sich mit einer einzigen Messkurve Moden nicht extrahieren lassen.

Schlussfolgerung

Es wurde die Beobachtung bestätigt, dass der Mittelwert der Antworten von drei gleichmäßig über den Umfang verteilten Mikrofonen ausschließlich den Schalldruck der Grundmode misst und dabei höhere Moden durch Interferenz ausblendet. Das Ergebnis ist mathematisch exakt bis zu einer Frequenz, die etwa doppelt so hoch liegt wie die obere Grenzfrequenz, wenn nur ein einziges Mikrofon verwendet wird.

In wieweit eine Extraktion der Grundmode mit Hilfe mehrerer außen angebrachter Mikrofone auch bei anderen Querschnitten möglich ist, ist Gegenstand weiterer Forschung. Unbekannt ist auch der Einfluss der am Eingang und Ausgang der Röhre angekoppelten akustischen Systeme.

Bislang wurde die „Drei-Mikrofon-Technik“ nur ohne Dämpfungsmaterial getestet. Der Autor geht davon aus, dass diese Technik grundsätzlich auch funktio-

niert, wenn Dämpfungsmaterial vorhanden ist.

Der Autor sieht eine Anwendung der Drei-Mikrofon-Methode überall dort als Vorteil, wo man gezwungen ist, das Schallfeld vom Rand der Röhre her zu messen, zum Beispiel bei der Impedanzmessung von Materialien oder in der Elektroakustik.

Danksagung

Der Autor bedankt sich herzlich bei der Firma NEXO SA, und ein besonderer Dank geht an die Entwicklungsabteilung der Firma B&C SpA für die Unterstützung dieser Arbeit. Eine englischsprachige Version dieses Artikels finden Sie in [6].

Literatur

- [1] AES Information Document for Acoustics; Plane-Wave-Tubes – Design and Practice. AES-1id-2012
- [2] Magalotti, R.; Pasini, P.: Building a Plane-Wavetube – Experimental and Theoretical Aspects. JAES, Vol 47, Jul/Aug 1999.
- [3] Buck, M.: Plane Wave Tubes – Uses and Limitations. AES 117 Convention Paper 6268, Oct 2004.
- [4] Morse, P.; Ingard, U.: Theoretical Acoustics. McGraw Hill, 1968.
- [5] Rienstra, S.: Fundamentals of Duct Acoustics. TU Eindhoven, 2015.
- [6] Panzer, J.: Extracting the Fundamental Mode from Sound Pressure Measurements in an Acoustic Tube. AES 147 Convention Paper 10238, NY, Oct 2019. ■

Joerg Panzer
Universität
Le Mans, IMDEA

Schallschutz- und Akustiklösungen weltweit



für Medizin und Gesundheit, Testeinrichtungen für die Industrie, Gebäudeakustik, Studios

deutschland@iac-gmbh.de
www.iac-gmbh.de